جامعة البعث — امتحانات الفصل الثاني 2016-2017 — المدة : ساعة ونصف

كلية العلوم — أسئلة مقرر التحليل التابعي (1) . — العلامة :(100) درجة

قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي — الاسم :

السؤال الأول (30درجة) (1) ليكن $q, p > 1$ بحيث: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فأثبت أن :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , a_k, b_k \ge 0$$

$(k = 1,2, \dots , n)$

(2) لتكن : $E = \{z = x + iy \ : x > 0 , y > 0\}$ هل هذه المجموعة محدبة ومتوازنة وماصة ؟ بين ذلك مع الحل.

(3) ليكن التطبيق : $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ ايزومتري.أثبت أنه مستمرا بانتظام وهوميومورفيزم .

السؤال الثاني (20درجة): (أ) أثبت أن الفضاء المتري التام هو مجموعة من الصنف الثاني ، وهات مثالاً عن مجموعة من الصنف الأول مع الحل .

(ب) ليكن التطبيق : $A : C[0,1] \to C[0,1]$

والمعرف بالعلاقة : $A(f(x)) = \frac{1}{2}\int_0^1 xtf(t)dt + \frac{5}{6}x$

المطلوب : أثبت أنه تطبيق ضاغط في الفضاء$C[0,1]$ ، وأوجد النقطة الثابتة له .

السؤال الثالث (10+10=20 درجة): (1)- في فضاء هيلبرت H أثبت صحة المتراجحة

(متراجحة شفارتز): $x, y \in H \quad , \quad |\langle x , y \rangle| = \sqrt{\langle x , x \rangle}.\sqrt{\langle y , y \rangle}$

2) - ليكن $x , y \in H$ أي عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة العلاقة :

$$\langle x , y \rangle = \left[\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right] + i\left[\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2\right]$$

السؤال الرابع (20 درجة): بفرض $x_1 , x_2 , \dots$ قاعدة في فضاء باناخ B . ولتكن S مجموعة كل المتتاليات العددية $\alpha = \{\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \dots\}$ التي من أجلها تتقارب السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k$:

أثبت أن المؤثر A المعرف كما يلي :

$$A : S \longrightarrow B$$

$$A(\alpha) = X \quad ; \quad X = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k$$

مؤثرخطي و محدود وأوجد نظيمه . أوجد المؤثر المرافق A^* ماذا تستنتج ؟.

السؤال الخامس (10 درجات): أوجد الفضاء المرافق للفضاء ℓ_1 .

انتهت الأسئلة — مدرسا المقرر

حمص في 10 / 7 / 2017 م. — مع التمنيات بالنجاح والتوفيق — د. سامح العرجة د. منير مخلوف

جامعة البعث — سلم تصحيح المذاكرة الأولى ...

كلية العلوم قسم الرياضيات — مقرر تحليل دالي (١) — السنة الرابعة

رياضيات (تحليل رياضي)

«الجزء الأول»

جواب السؤال الأول: (1) نفرض أن $p=1$ فتكون المتراجحة من الشكل الآتي:

[10] نبرهن صحة $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) \le \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k$

لأن:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k \le \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k$$

أما إذا كان $p \ne 1$ فيكون:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum(a_k+b_k)^{p-1}(a_k+b_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

10

وباستخدام متراجحة هولدر للمجاميع المنتهية نجد:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

وبالتالي نجد:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \le \left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

الآن بقسمة الطرفين على $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ نجد:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(2) ليكن $z_1, z_2 \in E$ حيث: $z_1 = x_1 + iy_1 \; ; \; x_1>0, y_1>0$

$z_2 = x_2 + iy_2 \; ; \; x_2>0, y_2>0$

ولنأخذ $0 \le \mu, \lambda$ بحيث: $\lambda + \mu = 1$ ولنكن:

$$\lambda z_1 + \mu z_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2) + i(\lambda y_1 + \mu y_2)$$

نلاحظ ما يلي: عندما $\lambda = 0$ يكون: $\lambda z_1 + \mu z_2 = z_2 \in E$ وهي محققة

(2)

وإذا كان $\mu=0$ فإن $\lambda z_1+\mu z_2=z_1\in E$ حسب ...

أما عندما $\lambda,\mu>0$ ، فإن:

$\lambda x_1+\mu x_2\geq\lambda x_1>0\Rightarrow\lambda x_1+\mu x_2>0$

$\lambda y_1+\mu y_2\geq\lambda y_1>0\Rightarrow\lambda y_1+\mu y_2>0$

ومنه: $\lambda z_1+\mu z_2\in E$ عندئذٍ محدبة في جميع الحالات

12 وبطريقة مماثلة تماماً إذا كان: $\lambda>0$ ، $\mu=0$ فيكون

$\lambda z_1+\mu z_2\in E$ عندئذٍ محدبة

فإذن المجموعة E محدبة.

إن المجموعة E غير متوازنة لأنه لو أخذنا $\lambda=-1$ فإن: $|\lambda|=|-1|\leq 1$

وبالتالي $\lambda z=(-1)(x+iy)=-x-iy\notin E$

حيث: $z=x+iy\in E$

أيضاً المجموعة E غير ماصة لأنه لو أخذنا: $z=-1+2i$ من الفضاء $\mathbb{C}$

فإنه لا يمكن إيجاد $\rho=\rho(z)$ ($\rho>0$) بحيث $\rho<|\lambda|$ ويكون $\lambda z\in E$

(3) ليكن $\varepsilon>0$ عدد حقيقي ، عندئذٍ يوجد $\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ بحيث يكون:

$\forall x_1,x_2\in X:\quad d(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow\rho(f(x_1),f(x_2))=d(x_1,x_2)<$

إذن التطبيق f مستمر بانتظام على X

أيضاً التطبيق f هو متباين كونه يحافظ على المسافة لأن:

$\forall x_1,x_2\in X:\quad f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\rho(f(x_1),f(x_2))=0\Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_1,x_2)=0\Rightarrow x_1=x_2$

وعليه فإن التطبيق f غامر (كونه ايزومتري) ومتباين فهو تقابل وبالتالي f^{-1} موجود وهو أيضاً ايزومتري (كونه غامر) ويحافظ على المسافة لأن:

$\forall x_1,x_2\in X:\quad y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)$

8 وبالتالي: $x_1=f^{-1}(y_1)$ ، $x_2=f^{-1}(y_2)$ كما أن:

$d(x_1,x_2)=d(f^{-1}(y_1),f^{-1}(y_2))=\rho(f(f^{-1}(y_1)),f(f^{-1}(y_2)))=$

$=\rho(y_1,y_2)$

فإذن:

$\rho(y_1,y_2)=d(f^{-1}(y_1),f^{-1}(y_2))$

وعليه فإن f مستمرة بانتظام على Y . إذن فطبقاً [illegible] f [illegible] $\bar{f}$ مستمرة

منطلقة أي على X ويساوي على [illegible] f [illegible] مستمرة

أي أن الطبيعة $\bar{f}$ هو [illegible] على X

حل السؤال الثاني: (أ) ليكن (X,d) فضاء متريًا تامًا، ولنفرض جدلاً

[ص2] مفروض منه أنه من الصنف الأول، أي أنه: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

حيث E_n $(n=1,2,\dots)$ مجموعات غير كثيفة في كل مكان

لذا فإنه علينا أن نكتب: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$

وبأخذ متمم الطرفين فيكون لدينا:

$$\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\sim \overline{E}_n)$$

وهنا كل المجموعات $G_n = \sim \overline{E}_n$ $(n=1,2,\dots)$ مفتوحة وكثيفة

8

(لأن $\overline{E}_n$ مغلقة و E_n غير كثيفة في كل مكان) وحسب المبرهنة الآتية:

«ليكن (X,d) فضاءً متريًا تامًا ولنفرض أن $\{G_n\}$ متتالية من المجموعات الجزئية المفتوحة الكثيفة من X، عندئذٍ: $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \Phi$»

يكون لدينا: $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \Phi$ وهذا تناقض

وهذا يعني أن الفرض الجدلي خاطئ، الأمر الذي يقضي بأن الفضاء المتري التام المفروض هو من الصنف الثاني.

مثلاً: مجموعة الأعداد العادية Q في R هي مجموعة من الصنف الأول لأن: $\{q_i\}$ $(i=1,2,\dots)$ مجموعات غير كثيفة في R، وأن:

4

$$Q = \bigcup_i \{q_i\}$$

(ب) لدينا:

$$d(Af_1, Af_2) = |Af_1 - Af_2| = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 xt\,[f_1(t) - f_2(t)]\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{\substack{0\leq x\leq 1 \\ 0\leq t\leq 1}} |x\,t| \cdot \max_{0\leq t\leq 1} |f_1(t) - f_2(t)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{0\leq t\leq 1} |f_1(t) - f_2(t)| = \frac{1}{2} d(f_1, f_2)$$

فإذن A تطبيق ضاغط

إذن بدءاً من النقطة الثابتة صفر: $f_0(x)=0$ ، وباستخدام المتتالية

$$f_1(x) = A f_0(x) = \frac{5}{6}x$$

$$f_2(x) = A f_1(x) = \frac{5}{12}\int_0^1 x t^2\,dt + \frac{5}{6}x = \left(\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x$$

$$f_n(x) = A f_{n-1}(x) = \left(\frac{5}{6^n}+\frac{5}{6^{n-1}}+\dots+\frac{5}{6^3}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x$$

8

وبالتالي فإن:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 5x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 5x\,\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = x$$

وبالتالي فإن النقطة الثابتة هي x أي أن: $f(x)=x$

أي إن هذه الدالة تمثل الحل الوحيد في الفضاء $C[0,1]$ للمعادلة التكاملية:

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,t\,f(x)\,dt + \frac{5}{6}x$$

مدرس المقرر:

د. منير مخلوف

جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحانات الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٦-٢٠١٧ سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	المدة : ساعة و نصف العلامة:(١٠٠) درجة

جواب السؤال الأول (---- درجة) : خاص بالدكتور منير مخلوف

جواب السؤال الثاني (-----درجة) : خاص بالدكتور منير مخلوف

جواب السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠درجة) :

١)- أياً كان العنصران $x,y \in H$ تصح المتراجحة (متراجحة شفارتز):

$$|\langle x,y\rangle| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

وتكون المساواة إذا كان $x=\theta$ أو $y=\theta$ أو $x=\alpha y$ حيث α عدد عقدي مناسب .

الإثبات :

إذا كان $x=\theta$ أو $y=\theta$ فالمساواة واضحة تماماً وإذا كان $x=\alpha y$ يكون لدينا :

$$|\langle x,y\rangle|^2 = |\langle \alpha y,y\rangle|^2 = \langle \alpha y,y\rangle.\overline{\langle \alpha y,y\rangle}$$
$$= \alpha.\bar{\alpha}.\langle y,y\rangle.\langle y,y\rangle$$
$$= \langle \alpha y,\alpha y\rangle.\langle y,y\rangle$$
$$= \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

(2)

وبالتالي يكون :

$$|\langle x,y\rangle| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

الآن من أجل أي عنصرين $x,y \in H$ بحيث $\langle x,y\rangle \neq 0$ عندئذٍ من أجل أي عدد عقدي λ يكون لدينا :

$$\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle \geq 0$$

$$\langle x,x\rangle - \bar{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \geq 0$$

(2)

نأخذ : $\lambda := \dfrac{\langle x,x\rangle}{\langle y,x\rangle}$ فنجد أن :

(2)

$$\langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle + \frac{\langle x,x\rangle^2}{|\langle y,x\rangle|^2}\langle y,y\rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle}{|\langle y,x\rangle|^2} \geq 1$$

$$\Rightarrow |\langle y,x\rangle|^2 \geq \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

(2)

وأخيراً فإن :

$$|\langle x,y\rangle| \geq \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

(2)

٢)- ليكن x, y أي عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة العلاقة :

$$\langle x,y\rangle=\left[\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right]+i\left[\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2\right]$$

$$\bullet\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\left\langle\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right\rangle-\left\langle\frac{x-y}{2},\frac{x-y}{2}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{4}\langle x+y,x+y\rangle-\frac{1}{4}\langle x-y,x-y\rangle$$

$$=\frac{1}{4}\left[\|x\|^2+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\|y\|^2-\|x\|^2+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle-\|y\|^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\langle x,y\rangle+2\langle y,x\rangle\right]=\frac{1}{2}\left[2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle\right]=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$$

$$\bullet\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left[i\langle x,y\rangle-i\langle y,x\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[2\operatorname{Im}\langle x,y\rangle\right]=\operatorname{Im}\langle x,y\rangle$$

وبالتالي فإن $II=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+i\operatorname{Im}\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle=I$

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة):

١)- **لنبرهن اولاً أن A خطي:**

$A(\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta)=\lambda_1 X+\lambda_2 Y \quad : \forall\lambda_2,\lambda_1\in\mathbb{C}\ \&\ X=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k \ , Y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k x_k$

حسب تعريف المؤثر يكون :

$$A(\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta)=A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1,\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2,\lambda_1\alpha_3+\lambda_2\beta_3,......)=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_1\alpha_k+\lambda_2\beta_k)x_k=$$

$$\lambda_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k+\lambda_2\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k x_k=\lambda_1 x+\lambda_2 y$$

اذن خطي .

لنأخذ النظيم $\|\alpha\|_S=\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\|_B \ ; \alpha\in S$ المحقق لشروط النظيم (لا يطلب اثبات أنه يحقق الشروط)

محدود (أو مستمر) $|A(\alpha)|=|X|\le\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\|=\|\alpha\|$ اذن A محدود .

إيجاد النظيم من المحدودية $\quad (*) \quad \|A\|=\frac{|A(\alpha)|}{\|\alpha\|}\le 1$

لنأخذ $\alpha=(1,0,0,....)$ واضح أن $\|\alpha\|=1$ كما أن :

$$|A(\alpha)| = |X| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right| \geq \|\alpha\| \Rightarrow$$

$$\|A\| = \sup|A(\alpha)| \geq 1 \quad (**)$$

من (*) و (**) نجد أن $\|A\|=1$

5

حسب تعريف المؤثر المرافق $\langle A\ \alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, A^{*}\beta\rangle$ أي أن يكون معرف جداء داخلي لعناصر المنطلق مع عناصر المستقر وهنا الجداء الداخلي غير معطى ولا يمكن تعريفه بين فضاء باناخ B و S مجموعة كل المتتاليات العددية لاختلاف طبيعة العناصر . نستنتج وفق معطيات المسألة أن A^{*} غير موجود.

جواب السؤال الخامس (١٠ درجات):

2

لنأخذ (e_i) قاعدة شاودر للفضاء ℓ_1 عندئذٍ كل عنصر x من ℓ_1 يكتب بالشكل: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$

ليكن f دالياً خطياً محدوداً. عندئذٍ:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i \quad (26)$$

حيث $f_i = f(e_i)$ تتعرف بشكل وحيد بواسطة الدالي f.

2

ولما كان $\|e_i\| = 1$ فإن: $|f_i| = |f(e_i)| \leq \|f\|\ \|e_i\| = \|f\|$ أي:

(27) $\sup_i |f_i| \leq \|f\|$ فإن $(f_i) \in \ell_\infty$.

من جهة أخرى ومن أجل كل عنصر من ℓ_∞ وليكن $\zeta = (\zeta_i)$ يمكننا إيجاد دالي خطي محدود g على ℓ_1

2

بحيث يكون: $g(x) \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \zeta_i$ حيث $\ell_1 \ni x = (\zeta_i)$.

نلاحظ أن $g \in \ell_1^{*}$ لأن g خطي ومحدود وأن:

2

$$|g(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i . \zeta_i| \leq \sup_i \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = \|x\| \sup_i |\zeta_i|$$

من العلاقة (26):

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i . f_i| \leq \sup_i \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = \|x\| \sup_i |f_i|$$

2

بأخذ $\|x\| = 1$ نجد: $\|f\| \leq \sup_i |f_i|$ (28)

من المتراجحتين (27) و (28) نستنتج : $\|f\| = \sup_i |f_i|$

وهذا يعني أن نظيم f ليس إلا النظيم على الفضاء ℓ_∞. وبالتالي نجد أن الفضاء المرافق ℓ_1 هو الفضاء ℓ_∞.

حمص في / ٧ / ٢٠١٧ م. انتهت الإجابات مدرسا المقرر

د. سامح العرجة ود. منير مخلوف